3
L'analisi sismica

3.1. Effetto del sisma sulle strutture

Per quanto riguarda l'effetto che il terremoto provoca sulle opere realizzate dall'uomo, ed in particolare sulle strutture, si può semplicisticamente ricondurre tutto ad un rapido movimento del terreno su cui l'edificio è fondato. Il suolo a sua volta determina nella struttura l'innesco di una serie di accelerazioni la cui intensità è ovviamente funzione dell'entità della vibrazione sismica, della natura geologica del terreno e delle caratteristiche dei materiali impiegati. Le accelerazioni prodotte inducono sulla struttura alcune rilevanti forze d'inerzia, ed essendo ogni edificio schematizzabile come un sistema elastico continuo a masse distribuite, esso risulterà soggetto ad un sistema di forze d'inerzia distribuite, proporzionali alle masse strutturali dei singoli elementi costituenti l'edificio stesso.
Inoltre il sisma non è un fenomeno statico (a forze costanti regolari), bensì dinamico, per cui le sollecitazioni indotte sulle strutture dal moto del terreno, sono variabili nel tempo e dipendono tanto dalle componenti stesse del moto (orizzontali, verticali) che dalle caratteristiche geometriche ed elastiche della struttura soggetta al sisma.
Poiché la simulazione del comportamento strutturale in regime dinamico (analisi al passo) è molto onerosa, la normativa italiana consente due approcci semplificati che portano entrambi alla schematizzazione dell'azione sismica come un insieme di forze orizzontali statiche, cioè costanti:

- l'analisi statica
- l'analisi dinamica modale.

Si faccia attenzione a non confondere l'analisi sismica modale con quella *nodale*, di cui si parlerà più avanti.
La scelta tra le possibili diverse schematizzazioni dell'azione sismica è sostanzialmente condizionata dall'accuratezza desiderata per la soluzione, dal tipo di informazioni disponibili e da quelle che si vogliono ottenere.
L'analisi strutturale di una costruzione civile, nei riguardi delle azioni sismiche, consiste innanzitutto nella determinazione, attraverso un'analisi dinamica, di un sistema di forze statiche, equivalenti ai massimi effetti prodotti dal sisma, capaci cioè di determinare sulla costruzione le stesse sollecitazioni massime che inducono le forze di inerzia durante il movimento sismico.
Il secondo passo consiste nello studio statico della costruzione, considerata cioè sollecitata in maniera statica dal sistema di forze equivalenti al sisma, precedentemente valutato.
In pratica le azioni dinamiche agenti nella struttura dovute all'accelerazione delle masse, espresse dalla relazione:

$$F(t) = m \cdot a\ (t) = variabile$$

vengono sostituite da azioni statiche equivalenti del tipo:

$$F = cost$$

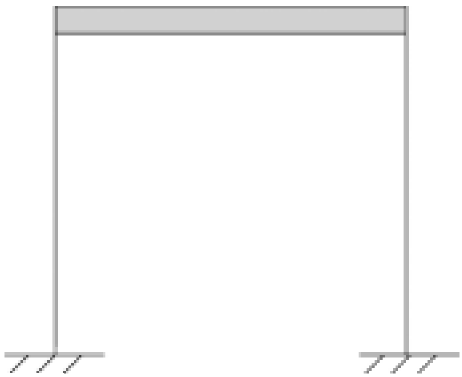
Le ipotesi fondamentali in base alle quali è possibile questa schematizzazione sono tre:

1) nella pratica professionale non è necessario conoscere l'andamento nel tempo delle caratteristiche di sollecitazione in ogni sezione dell'elemento strutturale, ma è sufficiente conoscerne il valore massimo;
2) nelle strutture tipiche dell'ingegneria civile (ad esempio edifici per civile abitazione) le masse strutturali sono concentrate in massima parte in corrispondenza degli impalcati (solai);
3) in alcuni casi (edifici in c.a.) gli impalcati possono essere considerati elementi indeformabili nel proprio piano, e quindi in grado di connettere rigidamente tutti i nodi strutturali giacenti su di essi.

Un edificio è nella realtà un sistema elastico a masse distribuite. Chiamando in causa le ipotesi 2 e 3, è però possibile, in maniera semplificata ma realistica, schematizzare l'edificio nella sua interezza come un insieme di elementi di massa m_i (piani sismici) dotati di 3 gradi di libertà (spostamento X, spostamento Y e rotazione attorno all'asse Z) connessi tra di loro per mezzo di elementi elastici. Il sistema di riferimento menzionato, che è quello comunemente adottato nella schematizzazione strutturale, individua il piano orizzontale con gli assi X e Y, mentre l'asse Z verticale è diretto verso l'alto.
È quindi possibile valutare il comportamento dell'edificio attraverso un modello più semplice ai fini del calcolo.
Per controllare gli effetti sulle costruzioni bisogna studiare la dinamica delle strutture in prima approssimazione soltanto in campo elastico (se si analizzano terremoti di bassa intensità), ma successivamente, volendo completare lo studio anche per fenomeni di elevata entità evitando sovradimensionamenti eccessivi, sarà necessario passare a modelli elasto-plastici.
Nei paragrafi seguenti si accenna ai principi basilari per lo sviluppo di un calcolo sismico su una struttura.

3.2. Oscillatore elementare

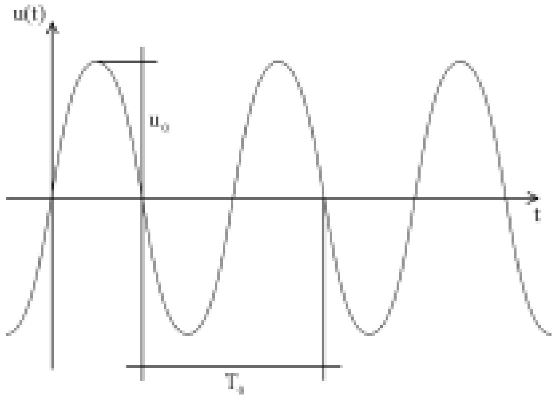
Per meglio comprendere il comportamento dinamico di una struttura complessa sottoposta all'effetto sismico, si inizia con l'analizzare quello del modello elementare classico, comunemente adottato come schema basilare dell'analisi strutturale: il telaio piano (due pilastri incastrati al piede che sorreggono in testa una trave orizzontale). Si tratta di un modello ad un solo grado di libertà, composto da due piedritti di rigidezza *k* ed un traverso infinitamente rigido in cui è concentrata tutta la massa *m* del sistema (pari al peso diviso l'accelerazione di gravità *g*).



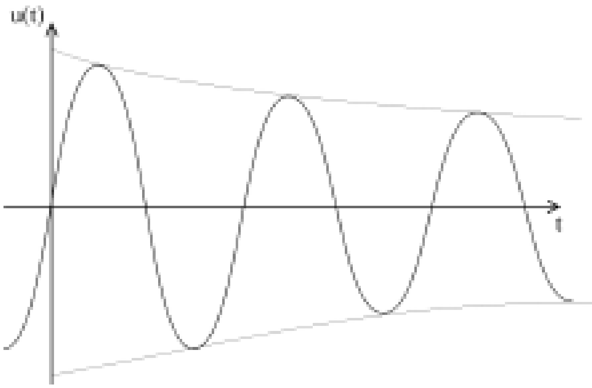
Se si impone alla testa del piedritto uno spostamento orizzontale u_0 (rispetto alla posizione di riposo verticale) e successivamente lo si lascia libero, sul sistema si instaurerà un regime di oscillazioni libere, caratterizzate da una andamento sinusoidale nel tempo con un periodo di oscillazione T_0, che è il tempo che intercorre per permettere al traverso di compiere un'oscillazione completa e ritornare nella posizione iniziale. Tale periodo, detto anche periodo proprio dell'oscillatore è legato alle due grandezze *m* e *k* (massa e rigidezza) dalla seguente relazione:

$$T_0 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Graficamente l'andamento dello spostamento del traverso (testa del piedritto) in funzione del tempo può essere rappresentato da una sinusoide come quella in figura:



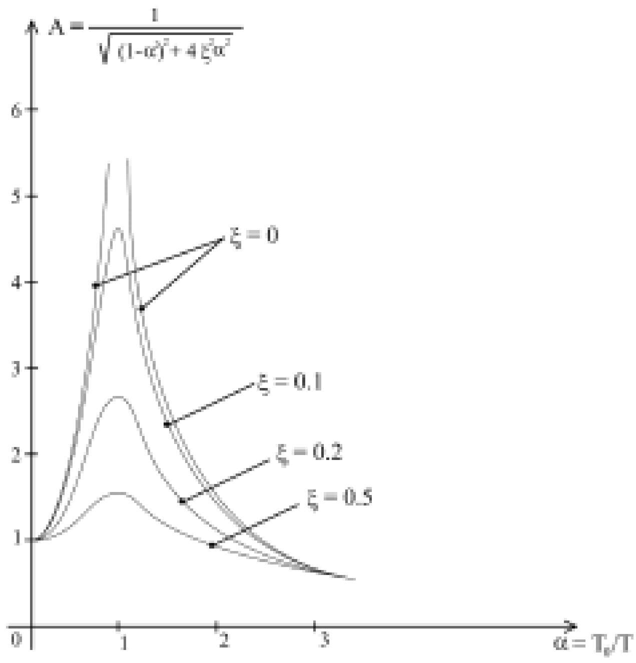
In questo schema si è assunto nullo l'effetto dello smorzamento dello spostamento nel tempo. Questo smorzamento è dovuto a tutta una serie di fenomeni dissipativi dell'energia che nel caso reale sono sempre presenti e che portano ad una graduale riduzione dell'entità della deformazione. Quindi se al sistema in esame si associa anche l'effetto di smorzamento di cui si è detto, si ottengono come risultato alcune oscillazioni libere smorzate, ovvero con un'ampiezza che si riduce progressivamente nel tempo tendendo a zero. Anche la dimensione del



periodo di oscillazione si riduce, seppure in maniera limitata; per questo motivo nelle applicazioni pratiche si trascura tale effetto, considerando sempre che il periodo proprio di vibrazione del sistema rimanga costante nel tempo.
Il comportamento che fin qui si è schematizzato è quello di un sistema che, a causa di un effetto impulsivo (ad es. un sistema che subisce un colpo) subisce una deformazione che, seguendo un andamento sinusoidale smorzato, tende gradualmente a ridursi fino ad annullarsi del tutto, con una rapidità che è tanto più alta quanto maggiore è l'effetto di smorzamento. Nella realtà ovviamente l'effetto sismico non può essere considerato alla stregua di un effetto impulsivo, in quanto il terremoto trasmette alla struttura un sistema continuo di accelerazioni che si traducono in una successione di forze applicate con intensità e tempi a volte anche notevolmente differenti tra di loro.
Per simulare una situazione del genere si dovrà considerare l'applicazione al sistema in esame di una forza di tipo sinusoidale, cioè variabile nel tempo, espressa dalla relazione sotto riportata:

$$F(t) = F \cdot sin(\omega \cdot t) = F \cdot sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t\right)$$

definita da un valore massimo della forza pari ad *F* e da una frequenza ω, cioè un periodo *T*. L'applicazione di questa forza instaurerà sul sistema un regime di oscillazioni forzate il quale, dopo una prima fase iniziale in cui saranno presenti anche le oscillazioni libere smorzate, assumerà una forma analoga a quella delle oscillazioni libere, ma con un periodo che adesso sarà quello della forzante, con uno sfasamento rispetto ad essa ed un'ampiezza delle oscillazioni che dipende dal rapporto *F/k (F = valore massimo della forza, k = rigidezza del sistema)*, dal rapporto dei due periodi $\alpha = T_0/T$ *(T_0 = periodo di vibrazione del sistema, T = periodo di oscillazione della forza)* e dal coefficiente di smorzamento ξ.



Tale dipendenza è espressa dalla relazione seguente:

$$u(t) = \frac{1}{\sqrt{(1-\alpha^2)^2 + 4\cdot\xi^2\cdot\alpha^2}} \cdot \frac{F}{K} \cdot sin(\omega \cdot t - \psi) = A \cdot \frac{F}{K} \cdot sin(\omega \cdot t - \psi)$$

essendo ψ l'eventuale sfasamento rispetto all'origine tra l'oscillazione della forzante e quella della struttura, e A il fattore dinamico di amplificazione dello spostamento $u(t)$.
Nella figura a fianco è rappresentato l'andamento di A al variare dei parametri α e ξ.
È interessante notare le seguenti osservazioni relative alle situazioni limite espresse nel diagramma sopra riportato:

Caso 1 – $\xi = 0$; $\alpha = 1$

Per $\xi = 0$ (smorzamento nullo) e $\alpha = 1$ (periodo della forzante uguale al periodo proprio della struttura, condizione detta di *risonanza*) la curva presenta un asintoto verticale, l'ampiezza delle oscillazioni cioè tende ad infinito. Questa è una condizione teorica, praticamente mai realizzabile nei casi comuni in quanto è difficilissimo che i due periodi coincidano esattamente ed è sempre presente un fattore di smorzamento diverso da zero.

Caso 2 – ξ *piccolo*; $\alpha = 1$

Per ξ piccolo e $\alpha = 1$ l'amplificazione è grande, ma con valore finito. Questa è invece una condizione che si può verificare nella pratica, ed è quella più pericolosa per la stabilità delle strutture. Essa infatti porterebbe a conseguenze rovinose sulla costruzione per via della notevole entità delle deformazioni a cui essa andrebbe incontro.
Più che l'effetto sismico, sono azioni tipo il vento o carichi imposti variabili in maniera regolare (ad esempio la marcia di una compagnia militare a passo cadenzato) quelli che possono ingenerare il fenomeno della risonanza su costruzioni dalla particolare natura strutturale (i ponti sono il tipo di struttura più facilmente soggetta a questo rischio). È quindi fondamentale progettare l'opera facendo in modo che il periodo di vibrazione della struttura sia molto lontano da quello delle possibili forzanti a cui verrà sottoposta. Come detto prima, per strutture di edifici ordinari questa condizione è pressoché irrealizzabile per la notevole differenza tra il valore del periodo del sistema e quello della forzante sismica.

Caso 3 – $\alpha = 1$

Per $\alpha = 0$ (periodo della forzante molto più grande del periodo proprio della struttura) la variazione della forza è di tipo quasi statica senza effetti di amplificazione dinamica; ciò si può esprimere in termini matematici con $A = 1$. La massa quindi segue la forza come se si trattasse di tante condizioni statiche in sequenza.

Caso 4 – $\alpha \rightarrow \infty$

Per α che tende ad infinito l'amplificazione dinamica tende a zero; il sistema oscillante cioè, poiché la variazione della forzante è molto rapida, tende a non risentire dell'effetto, comportandosi quindi come se questa non fosse presente.

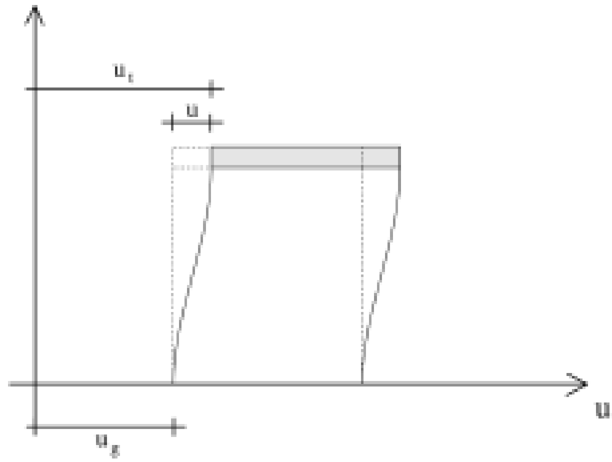
I tre casi generali in precedenza menzionati (oscillazioni libere, oscillazioni libere smorzate, oscillazioni forzate) possono essere ricondotti ad un'unica equazione di equilibrio differenziale del sistema, in cui l'assegnazione di valori nulli ad opportuni parametri può portare alla rappresentazione dei casi singoli:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = F \cdot sin(\omega \cdot t)$$

con il seguente significato dei simboli adottati:

$m\ddot{u}$	forza d'inerzia
$c\dot{u}$	smorzamento di tipo viscoso
ku	forza di richiamo elastico dei piedritti
$F\ sin(\omega\, t)$	forzante esterna.

Essendo inoltre u lo spostamento dell'impalcato, $\ddot{u}$ e $\dot{u}$ la derivata seconda e prima rispetto al tempo, ovvero l'accelerazione e la velocità dello stesso.
Il sisma però non è schematizzabile come una forzante esterna applicata in corrispondenza del traverso orizzontale del telaio che si sta considerando (come erroneamente spesso si è portati a pensare), bensì come uno spostamento imposto dal terreno alla fondazione della struttura. L'equazione di equilibrio resta simile a quella sopra riportata, ma, mentre la forza viscosa e la forza elastica rimangono sempre dipendenti dallo spostamento u, la forza d'inerzia dipenderà dallo spostamento totale u_t del traverso, quindi dalla somma degli spostamenti u_g e u, essendo u_g lo spostamento del terreno e u lo spostamento relativo del traverso (rispetto al piede del piedritto). L'immagine sottostante chiarisce meglio il significato dei parametri in gioco.



L'equazione di equilibrio assume la seguente forma:

$$m\ddot{u}_t + c\dot{u} + ku = 0$$

$$m \cdot (\ddot{u}_g + \ddot{u}) + c\dot{u} + ku = 0$$

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = -m\ddot{u}_g = P_{eq}$$

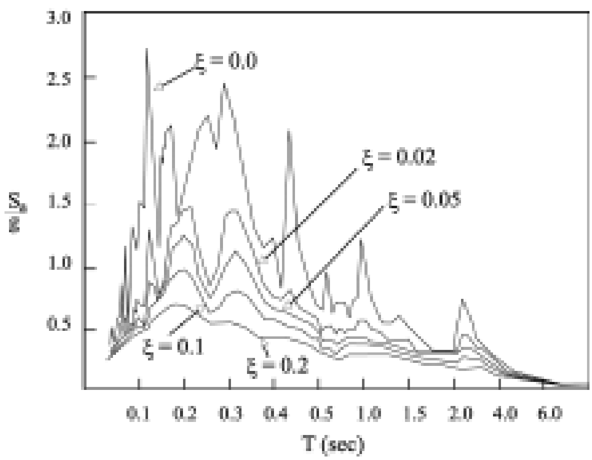
Nell'ultima equazione, P_{eq} rappresenta il carico equivalente dovuto all'eccitazione della base della struttura. Se si assume un andamento sinusoidale dello spostamento u_g del terreno si ritorna al caso analizzato in precedenza ed è quindi possibile calcolare l'entità dello spostamento massimo.
Quando la legge che descrive l'andamento dello spostamento u_g è una funzione qualunque, ed è quindi una funzione qualunque anche la sua derivata seconda, come é effettivamente nel caso di un accelerogramma del terremoto, sarà ancora possibile calcolare lo spostamento massimo mediante una serie di integrazioni numeriche.

3.3. Spettro di risposta elastico

La nuova norma sismica attribuisce un'importanza fondamentale al concetto di spettro di risposta. Dato un accelerogramma, si definisce spettro di risposta dello spostamento S_{De} un diagramma nel quale sono riportate, per assegnati valori dello smorzamento ξ, una serie di curve che esprimono, in funzione del periodo proprio T_0 di un oscillatore elementare, la risposta massima dell'oscillatore stesso quando questo viene assoggettato all'accelerogramma utilizzato.
Il concetto di spettro di risposta si può ovviamente estendere anche a sistemi più complessi, e quindi riferirlo anche all'intera struttura da analizzare.
Dallo spettro dello spostamento S_{De} è possibile passare ad altri due tipi di diagrammi, lo spettro delle velocità e quello delle accelerazioni. Indicati rispettivamente con S_v e S_a questi altri due spettri, vale la seguente espressione che li mette in relazione tra di loro:

$$S_a(T_o,\xi) = \frac{2\cdot\pi}{T_o}\cdot S_v(T_o,\xi) = \frac{4\cdot\pi^2}{T_0^2}\cdot S_{De}(T_o,\xi)$$

Nella figura sottostante è riportato la rappresentazione grafica dello spettro di risposta elastico delle accelerazioni ottenuto da misurazioni effettuate su sistemi reali.
L'immagine ha lo scopo di mostrare l'andamento indicativo del diagramma, ma nell'impiego comune ovviamente verranno adottati diagrammi più regolari e di più semplice utilizzo.
Sul grafico rappresentato sono rappresentate diverse pseudo-curve, ciascuna delle quali è rife-



Spettro di risposta elastico

rita ad un valore differente di ξ, cioè a differenti livelli di smorzamento del sistema. Sull'asse delle ascisse si trova il periodo T di vibrazione del sistema espresso in secondi, mentre sull'asse delle ordinate è indicato il rapporto S_d/g, cioè l'accelerazione a cui è soggetto il sistema, rapportata a quella di gravità g.
Il concetto di spettro di risposta è di grande importanza applicativa. Come detto in precedenza, l'effetto del sisma si manifesta sulla struttura sotto forma di un'accelerazione al suolo, ma per la risoluzione della stessa è necessario tradurre tale accelerazione in forzanti applicate agli impalcati (o ai nodi) dell'edificio.
Se si considera una struttura costituita da un oscillatore semplice (in seguito verrà affrontato il problema di strutture complesse a più gradi di libertà), assegnato un accelerogramma di progetto, sarà possibile calcolare lo spostamento istante per istante soltanto con l'impiego di complesse operazioni di integrazioni numeriche. Se invece si dispone dello spettro di risposta, il calcolo è immediato; infatti, una volta fissato il valore dello smorzamento ξ (di solito si fa riferimento ad un valore convenzionale del 5% - $\xi = 0.05$) e calcolato il periodo proprio della struttura T_0, si potrà facilmente risalire tramite il diagramma dello spettro al valore di S_{De} che rappresenta l'entità dello spostamento massimo; moltiplicando questo valore per la rigidezza k si ottiene una forza F_{eq}, che supposta applicata staticamente all'oscillatore, produce la stessa sollecitazione massima. Nota questa sollecitazione, si potrà quindi passare alla verifica di resistenza della struttura.
In generale le normative sismiche forniscono gli spettri di risposta in termini di accelerazioni S_a piuttosto che di spostamenti S_{De}, ma ricordando la relazione precedente si riescono ad ottenere le forzanti a partire dallo spettro delle accelerazioni:

$$F_{eq} = k \cdot S_{De}(T_o, \xi) = k \cdot \frac{T_0^2}{4 \cdot \pi^2} \cdot S_a(T_o, \xi)$$

Se nella formula in questione si sostituisce la variabile T_0 con la sua espressione in funzione della rigidezza k e della massa m data dall'espressione seguente:

$$T_0 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}$$

si otterrà la relazione di seguito riportata:

$$F_{eq} = m \cdot S_a(T_o, \xi)$$

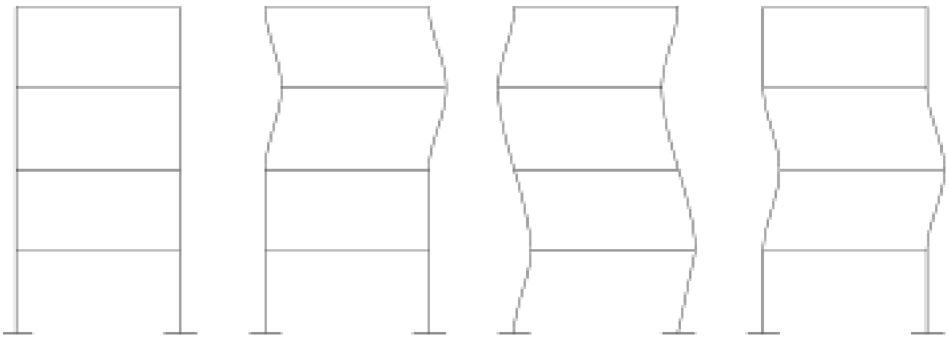
Il calcolo della forza equivalente diventa così molto semplice: è infatti uguale al prodotto della massa per la massima accelerazione efficace S_a letta sullo spettro in funzione del periodo T_0 e dello smorzamento ξ.

3.4. Sistemi a più gradi di libertà

Estendendo quanto detto in precedenza relativamente all'oscillatore semplice ad un telaio più complesso (per esempio un telaio Shear Type multipiano, equivalente allo schema precedente ma con n piani rigidi collegati da piedritti di rigidezza k_i) si otterrà un sistema di n equazioni di equilibrio ad n incognite (u_i), che, in forma matriciale, potrà essere rappresentato nella forma seguente:

$$M\ddot{U} + C\dot{U} + KU = u_g MR$$

in cui *M, C* e *K* sono tutte matrici quadrate di ordine *n*, *U* il vettore degli spostamenti di piano con le sue derivate prime e seconde rispetto al tempo, ed *R* il vettore direzione del sisma (nel caso di telaio piano un vettore formato da tutti 1). Questo sistema di equazioni è composto da equazioni differenziali tra di loro accoppiate e quindi di non facile risoluzione. La soluzione del sistema si semplifica se si esprime il moto globale della struttura in funzione dei modi di oscillazione libera del sistema.
Per chiarire il significato fisico di oscillazione libera, si provi a deformare un sistema elastico, lasciandolo poi libero di oscillare. In generale si vedrà ogni piano deformarsi in maniera indipendente dagli altri. Se si applica però una particolare deformata iniziale, si vedranno i piani oscillare contemporaneamente in maniera proporzionale gli uni agli altri e con un periodo di vibrazione *T* ben definito.
Tali deformate sono dette anche modi principali di vibrare del sistema. Nell'immagine seguente è rappresentato un sistema elastico (telaio multipiano) nella posizione indeformata, e così come si deforma secondo alcuni dei modi principali di vibrare.



I modi principali del sistema, godono di una proprietà fondamentale:

Qualunque deformazione assunta dal sistema per effetto di una forzante F
può essere descritta come combinazione lineare dei modi principali di vibrare.

È quindi sufficiente conoscere i modi principali di una struttura, per risalire a qualunque possibile deformazione della stessa. Nella realtà le deformate associate ai modi principali non sono necessariamente deformazioni reali del sistema, ma grandezze che, composte insieme, forniscono la deformata effettiva della struttura soggetta a dati carichi.
Ci saranno alcuni modi che avranno un'influenza maggiore rispetto ad altri nella generazione della deformata globale.
Per chiarire meglio questo concetto si ipotizzi di avere un sistema strutturale con solo tre modi di vibrare (tre forme modali), che siano già stati calcolati precedentemente, esprimibili in forma vettoriale come segue:

$$\underline{\Phi}_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{vmatrix} \quad \underline{\Phi}_2 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{vmatrix} \quad \underline{\Phi}_3 = \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

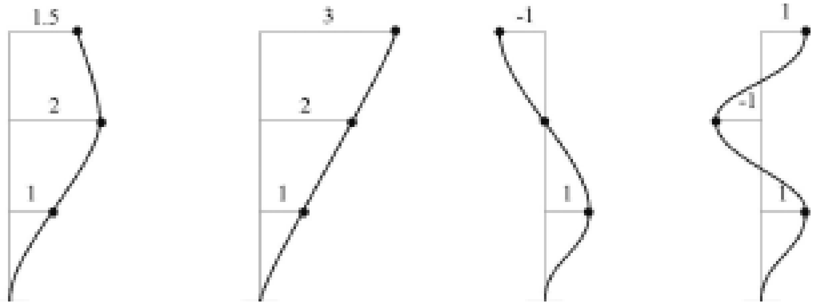
Il campo degli spostamenti può essere scritto come combinazione dei tre modi nella seguente forma:

$$\underline{U}(t) = y_1(t)\ \underline{\Phi}_1 + y_2(t)\ \underline{\Phi}_2 + y_3(t)\ \underline{\Phi}_3$$

La combinazione è ottenuta dalla somma delle forme modali moltiplicate per dei coefficienti funzioni del tempo $y_i(t)$.
Si fissi l'attenzione ad un certo istante t_0 quando l'entità della deformazione è data dal seguente vettore:

$$\underline{U}(t_0) = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 1.5 \end{vmatrix}$$

In forma grafica, il tutto si può tradurre, tenendo conto dei valori dei tre modi di vibrare prima riportati, come rappresentato nell'immagine seguente:



$\underline{U}(t_0)$ = $y_1(t_0) * \underline{\Phi}1$ + $y_2(t_0) * \underline{\Phi}_2$ + $y_3(t_0) * \underline{\Phi}_3$

Lo spostamento totale è cioè ottenuto come composizione dei tre modi principali, con l'impiego di opportuni coefficienti moltiplicativi.
Esplicitando le singole componenti e sostituendo i valori numerici noti si ottengono le tre seguenti relazioni:

$$1 = y_1(t_0) * 1 + y_2(t_0) * 1 + y_3(t_0) * 1$$

$$2 = y_1(t_0) * 2 + y_2(t_0) * 0 + y_3(t_0) * (-1)$$

$$1.5 = y_1(t_0) * 3 + y_2(t_0) * (-1) + y_3(t_0) * 1$$

Risolvendo il sistema di tre equazioni a tre incognite si ottengono i seguenti valori per i coefficienti *y(t):*

$$y_1(t_0) = 13/16$$

$$y_2(t_0) = 9/16$$

$$y_3(t_0) = -3/8$$

I modi di vibrare soddisfano un'importante proprietà, detta di ortogonalità, per la quale valgono le seguenti relazioni:

$$\underline{\Phi}_i^t M \underline{\Phi}_j = 0 \qquad \text{(se i è diverso da j)}$$

$$\underline{\Phi}_i^t M \underline{\Phi}_i = m_i$$

$$\underline{\Phi}_i^t K \underline{\Phi}_j = 0 \qquad \text{(se i è diverso da j)}$$

$$\underline{\Phi}_i^t K \underline{\Phi}_i = k_i$$

ricordando che M e K sono rispettivamente le matrici delle masse e delle rigidezze.
Se l'equazione di equilibrio globale viene premoltiplicata per $\underline{\Phi}_i^t$ e ipotizzando che la matrice dello smorzamento C possa essere espressa come combinazione lineare di K e M, cioè:

$$C = a \cdot K + b \cdot M$$

si ottengono le equazioni del moto disaccoppiate nelle coordinate principali y_i

$$m_i \ddot{y}_i + c_i \dot{y}_i + k_i y_i = l_i \ddot{u}_g$$

dove $l_i = \underline{\Phi}_i^t M\underline{R}$ è chiamato coefficiente di eccitazione modale o di partecipazione. Esso fornisce il peso che ha quel particolare modo nel calcolo degli spostamenti e delle forze per il sisma caratterizzato dalla direzione $\underline{R}$. Avere disaccoppiato il problema significa poter trattare la struttura come se si avessero n sistemi ad un grado di libertà indipendenti (ovvero n oscillatori semplici) di cui si è precedentemente visto come calcolare il vettore delle forze equivalenti e di conseguenza le sollecitazioni nodali. In questo modo si riconduce ad una forma semplice, e quindi facilmente risolvibile, qualunque sistema strutturale anche molto complesso.
Determinate le risposte modali massime, per effettuare la combinazione non è realistico sommare tutti i contributi massimi, poiché tali valori non si presentano contemporaneamente. Sono stati proposti pertanto diversi metodi di combinazione. Quello imposto dalla normativa italiana, e più frequentemente adoperato, utilizza la media quadratica della grandezza considerata (forza o spostamento).
Ogni grandezza di interesse viene quindi in questo modo valutata come media quadratica dei valori massimi modali:

$$s_{max} = \sqrt{\sum_i s_{i\,max}^2}$$

La sommatoria andrebbe estesa a tutti i modi di vibrazione, ma l'operazione, oltre che più pesante, sarebbe superflua, poiché i contributi principali vengono soprattutto dai primi modi (quelli aventi periodo con valore più elevato). Per determinare il numero minimo di modi, già la normativa sismica introdotta dal D.M. del gennaio 1996 ha previsto che la massa sismica eccitata dovesse essere almeno pari all'85% della massa totale della struttura. Quindi sarà sufficiente considerare un numero di modi di vibrare tale che la somma della percentuale di massa eccitata da ciascun modo non sia inferiore all'85% della massa totale.
Per chiarire meglio questo punto bisogna introdurre il concetto di massa modale efficace, che rappresenta la massa sismica eccitata da un singolo modo. La somma di tutte le masse modali efficaci fornisce la massa totale della struttura, ovvero:

$$m_{tot} = \sum m_{i-eff}$$

con la sommatoria estesa a tutti i modi. Estendendo invece la sommatoria ad un numero minore di modi si ha:

$$\frac{\sum m_{i-eff}}{m_{tot}} \leq 1$$

le suddette norme indicano come numero di modi minimo quello per cui è verificata la seguente espressione:

$$\frac{\sum m_{i-eff}}{m_{tot}} \geq 0.85$$

La formula che fornisce la massa modale efficace è:

$$m_{i-eff} = \frac{l_i^2}{m_i}$$

essendo l_i il coefficiente di partecipazione modale e m_i la massa modale generalizzata definiti precedentemente.
Questa formula già contenuta nella normativa italiana e confermata anche dall'Ordinanza n. 3274 del 2003 fornisce buoni risultati solo qualora i periodi T dei vari modi di vibrare siano abbastanza differenti tra di loro ($T_i < 0.9\ T_j$). Nell'ipotesi di periodi poco diversi o addirittura coincidenti, l'Ordinanza, come pure l'Eurocodice 8, consiglia un'altra formula di combinazione: la Combinazione Quadratica Completa (CQC):

$$E = \left(\sum\sum \rho_{ij} \cdot E_i \cdot E_j\right)^{1/2}$$

essendo ρ_{ij} il coefficiente di correzione definito dalla seguente relazione:

$$\rho_{ij} = \frac{\left(8 \cdot \xi^2 \cdot \left(1+\beta_{ij}\right) \cdot \beta_{ij}^{\ 3/2}\right)}{\left(\left(1-\beta^2_{\ ij}\right)^2 + 4 \cdot \xi^2 \cdot \beta_{ij} \cdot \left(1+\beta_{ij}\right)^2\right)}$$

con il seguente significato dei simboli adottati:

$\beta_{ij} = \dfrac{\omega_i}{\omega_j}$ (rapporto delle pulsazioni)

$\omega_i = \dfrac{2 \cdot \pi}{T_i^{'}}$ (pulsazione)